KMA 한국수학학력평가(상반기) 정답과 해설

중학교 1학년

1. 630	**2.** 9
3. 2	**4.** 5
5. 29	**6.** 22
7. 83	**8.** 2
9. 5	**10.** 20
11. 5	**12.** 6
13. 4	**14.** 130
15. 32	**16.** 17
17. 14	**18.** ②
19. 48	**20.** 7
21. 65	**22.** 140
23. 4	**24.** 18
25. 26	**26.** 45
27. 15	**28.** 2
29. 10	**30.** 40

1. 최대공약수는 $G=2^2\times5$
최소공배수는 $L=2^3\times3^2\times5^2\times7$
$\therefore \dfrac{L}{G}=\dfrac{2^3\times3^2\times5^2\times7}{2^2\times5}$
$=2\times3^2\times5\times7=630$

2. 양변을 60으로 나누면
$4x-12-4=20$
$4x=36$
$x=9$

3. ㄱ. $5\div a\times b=5\times\dfrac{1}{a}\times b=\dfrac{5b}{a}$ (거짓)
ㄴ. $a\div(b\div c)=a\div\left(\dfrac{b}{c}\right)=a\times\dfrac{c}{b}=\dfrac{ac}{b}$ (참)
ㄷ. $3\times a-b\times(-2)=3a+2b$ (거짓)
ㄹ. 정육면체의 가로, 세로, 높이가 모두 x이므로 부피는 $x\times x\times x=x^3$ (참)
ㅁ. 한 면의 넓이가 a^2인 정사각형 6개로 이루어진 정육면체의 겉넓이는 $6\times a^2=6a^2$ (거짓)
따라서 옳은 것의 개수는 2

4. $\dfrac{x^2-9y}{x}=\dfrac{3^2-9\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)}{3}$
$=\dfrac{9+6}{3}=5$

5. 정수는 9, 0, -7이므로 $a=9-7=2$
유리수는 모든 수이므로
$b=a+\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{4}{5}+(-1.4)$
$=\dfrac{20-5+8-14}{10}$
$=\dfrac{9}{10}$
$\therefore a+30b=2+27=29$

6. $6x+4+7x=8x-7+3x+ax+b$
$13x+4=(a+11)x+(b-7)$
이 식이 항등식이므로 $a=2$, $b=11$
$\therefore ab=22$

7. $64\times A=2^6\times A$이고, $21=1\times21=7\times3$이다.
(ⅰ) $2^6\times A$의 소인수가 한 개인 경우
$21=20+1$에서 $A=2^{14}$이다.
그러나 2^{14}은 100보다 큰 수이므로 조건을 만족하지 않는다.
(ⅱ) $2^6\times A$의 소인수가 두 개일 때,
$21=(6+1)\times(2+1)$에서 $A=p^2$
(단, p는 홀수인 소수)의 꼴이다.
이때 A가 100보다 작으므로 가능한 수는
$3^2=9$, $5^2=25$, $7^2=49$이다.
$\therefore 9+25+49=83$

8. (주어진 식)$=2\times\left(1+10\times\dfrac{3}{5}\right)+(-1)\times12$
$=2(1+6)-12$
$=2$

9. $b=\dfrac{2}{3}a$, $c=\dfrac{7}{2}b$이므로 $a=3k$라 하면
$b=\dfrac{2}{3}\times3k=2k$, $c=\dfrac{7}{2}\times2k=7k$이다.
$\dfrac{4a-b+5c}{a-4b+2c}=\dfrac{4\times3k-2k+5\times7k}{3k-4\times2k+2\times7k}=\dfrac{45k}{9k}=5$

10. $\frac{1}{3}☆\left(-\frac{1}{2}\right)$은

$\left|\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{2}\right)\right|=\frac{1}{6}$의 역수인 6

$\frac{13}{15}☆(-1)$은

$\left|\frac{13}{15}+(-1)\right|=\frac{2}{15}$의 역수인 $\frac{15}{2}$

주어진 식을 간단히 하면

$-30\times\left[\left\{\frac{1}{3}☆\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}\triangle\left\{\frac{13}{15}☆(-1)\right\}\right]$

$=-30\times\left(6\triangle\frac{15}{2}\right)$

이다. $6-\frac{15}{2}=-\frac{3}{2}$이므로

$6\triangle\frac{15}{2}$는 $-\frac{3}{2}$의 역수인 $-\frac{2}{3}$이다.

따라서 구하는 식의 값은 $-30\times\left(-\frac{2}{3}\right)=20$

11. $\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}=7$에서 $\frac{a+2b}{2ab}=7$

$\therefore a+2b=14ab$

$\frac{2a-3ab+4b}{5ab}=\frac{2(a+2b)-3ab}{5ab}$

$=\frac{28ab-3ab}{5ab}=\frac{25ab}{5ab}=5$

12. 양변에 10을 곱하면

$7x+40=2x+6a$

$5x=6a-40$

$x=\frac{6a-40}{5}$이고, x를 음수가 되게 하는 자연수

a는 1, 2, ⋯, 6이다.

따라서 a의 개수는 6개이다.

13. $10-3(x-4)=8x$를 풀면

$10-3x+12=8x$, $11x=22$ $\quad\therefore x=2$

이 값을 $\frac{6a+16}{5}=x+3a-6$에 대입하면

$\frac{6a+16}{5}=2+3a-6$

$6a+16=15a-20$, $9a=36$ $\quad\therefore a=4$

14. (나)에서 $A=13\times a$, $B=13\times b$(단, a, b는 서로소)

(다)에서 $273=13\times a\times b$이므로 $a\times b=3\times7$

(가)에서 A, B 모두 두 자리 수이므로 두 수는

$13\times3=39$, $13\times7=91$이다.

$\therefore A+B=39+91=130$

15. $ab=\frac{1}{3}\times(-4)=-\frac{4}{3}$, $-ab=\frac{4}{3}$

$a^2b^2=\frac{1}{9}\times16=\frac{16}{9}$, $-a^2b^2=-\frac{16}{9}$

$\frac{a^2}{b}=\frac{1}{9}\times\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{36}$, $-\frac{a^2}{b}=\frac{1}{36}$

$\frac{b^2}{a}=16\times3=48$, $-\frac{b^2}{a}=-48$

$48>\cdots>-\frac{16}{9}>-48$이므로

$A=48$, $B=-\frac{16}{9}$

$\therefore A+9B=48-16=32$

16. 표의 맨 아래 가로줄의 식의 합과 맨 오른쪽 세로줄의 식의 합이 같으므로

$6+(x-2)+(5x-7)$

$=(x+1)+x+(5x-7)$

에서 $x=3$이다.

$x=3$을 마방진에 넣으면 다음과 같다.

a	9	4
b	c	3
6	1	8

즉, 각 줄의 수의 합은 15이다.

맨 위의 가로줄에서 $a+9+4=15$이므로 $a=2$

맨 왼쪽 세로줄에서 $2+b+6=15$이므로 $b=7$

가운데 세로줄에서 $9+c+1=15$이므로 $c=5$

$\therefore x+a+b+c=3+2+7+5=17$

17. $|a|=3$에서 $a=3$ 또는 $a=-3$이다.

(i) $a=3$일 때

$b<1<3$이면 1이 평균이므로

$1=\frac{b+3}{2}$ $\quad\therefore b=-1$

$1<b<3$이면 b가 평균이므로

$b=\frac{1+3}{2}=2$

(ii) $a=-3$일 때

$b<-3<1$에서 -3이 평균이므로

$-3=\frac{b+1}{2}$ $\quad\therefore b=-7$

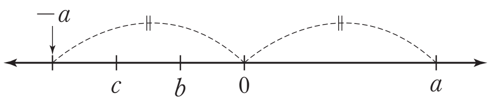
따라서 b의 값이 될 수 있는 모든 수들의 곱은
$(-1)\times2\times(-7)=14$

18. ㈎에서 a와 b의 부호는 서로 반대이다.

(i) $a>0$, $b<0$인 경우

㈑에서 a, c의 합이 음수이려면 $c<0$이어야 한다.

㈏를 만족하도록 수직선에 나타내면 다음과 같다.

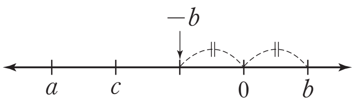


그러나 이 경우 $a+c>0$이므로 ㈑를 만족하지 않는다.

(ii) $a<0$, $b>0$인 경우

㈐에서 b, c의 합이 음수이려면 $c<0$이어야 한다.

㈏를 만족하도록 수직선에 나타내면 다음과 같다.



이때 $a+c<0$에서 ㈑도 만족한다.

따라서 조건을 모두 만족하는 세 수의 대소 관계는 $a<c<b$이다.

19. [1단계]에서 앞과 뒤에서 보이는 면이 각각 3개이고, 양옆에서 보이는 면이 각각 2개이고, 위에서 보이는 면이 4개이므로 보이는 면의 수는
$3+3+2+2+4=14$(개)이다.
다음 단계로 갈 때 블록 하나가 추가되면, 앞과 뒤에서 보이는 면이 합쳐서 4개 늘어나고, 위에서 보이는 면이 4개 늘어나고, 양옆에서 보이는 면은 그대로이므로 보이는 면의 수는 모두 8개 늘어난다.

[1단계] 14
[2단계] $14+8=22$
[3단계] $14+8+8=30$
⋮
[n단계] $14+\underbrace{8+8+\cdots+8}_{(n-1)\text{개}}=14+8(n-1)$
$=8n+6$

따라서 $a=8$, $b=6$에서 $ab=8\times6=48$

20. $12=2^2\times3$, $18=2\times3^2$, $10=2\times5$에서 세 수의 최소공배수는 $2^2\times3^2\times5=180$이다.
필요한 벽돌의 개수는
가로 $\frac{180}{12}=15$(개), 세로 $\frac{180}{18}=10$(개),
높이 $\frac{180}{10}=18$(개)의 곱이므로
$15\times10\times18$
$=(3\times5)\times(2\times5)\times(2\times3^2)$
$=2^2\times3^3\times5^2$(개)
의 벽돌이 필요하다.
따라서 $a=2$, $b=3$, $c=2$에서 $a+b+c=7$

21. A에는 x(L), B에는 $2x+10$(L),
C에는 $3x+20$(L), D에는 $4x+30$(L),
E에는 $5x+40$(L)의 연료를 넣고 25 L가 남았으므로
$x+(2x+10)+(3x+20)+(4x+30)+(5x+40)$
$=200-25$
$15x+100=175$, $15x=75$ $\quad\therefore x=5$
따라서 E에 넣은 연료는
$5x+40=5\times5+40=65$(L)이다.

22. ㈎ $\frac{n^2}{60}=\frac{n^2}{2^2\times3\times5}$이 자연수이므로 n의 소인수는 2, 3, 5를 포함해야 한다.

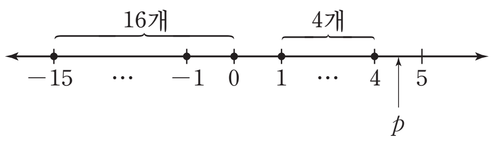
㈏ $\frac{21^2}{n}$을 기약분수로 나타내면 분자가 1이므로 n은 $3^2\times7^2$의 배수이다.

두 조건을 모두 만족하는 가장 작은 자연수 n은 $2\times3^2\times5\times7^2$이다.
$n\times\square$가 어떤 수의 제곱이면 소인수분해했을 때 지수가 짝수이어야 하므로 가능한 두 자리 자연수는
$n\times\square=2\times3^2\times5\times7^2\times\boxed{2\times5}$에서 $\square=10$
$n\times\square=2\times3^2\times5\times7^2\times\boxed{2^3\times5}$에서 $\square=40$
$n\times\square=2\times3^2\times5\times7^2\times\boxed{2\times3^2\times5}$에서 $\square=90$
$\therefore 10+40+90=140$

23. 십의 자리와 일의 자리의 숫자의 차가 n이므로 각 자리의 숫자를 x, $x+n$이라고 하자.
각 자리의 수를 바꾼 수와 처음 수 중에서
큰 수는 $10(x+n)+x$이고, 작은 수는
$10x+(x+n)$이다.
두 수의 차가 36이므로

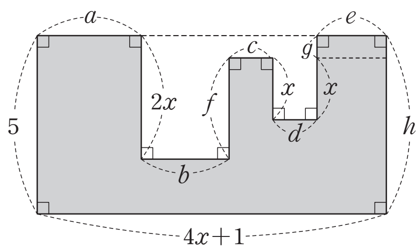
$10(x+n)+x=10x+(x+n)+36$
$11x+10n=11x+n+36$, $9n=36$
$\therefore n=4$

24. p를 수직선에 나타내면 다음과 같다.



p는 분모가 12인 기약분수이므로
$\dfrac{\square}{12}$(단, $\square$는 12와 서로소)의 꼴이다.
$4=\dfrac{48}{12}$, $5=\dfrac{60}{12}$이므로 조건을 만족하는 p는
$\dfrac{49}{12}$, $\dfrac{53}{12}$, $\dfrac{55}{12}$, $\dfrac{59}{12}$이다.
$\therefore \dfrac{49}{12}+\dfrac{53}{12}+\dfrac{55}{12}+\dfrac{59}{12}=\dfrac{216}{12}=18$

25.



위 그림에서 $a+b+c+d+e=4x+1$,
$f+g=2x$, $h=5$이므로 둘레의 길이는
$(4x+1)\times2+2x\times2+x\times2+5\times2$
$=14x+12$
따라서 $m=14$, $n=12$에서 $m+n=26$

26. 원가 x만 원에서 60 %만큼 오른 금액이 A의 판매 가격이다.
(판매 가격)$=x\left(1+\dfrac{60}{100}\right)=\dfrac{8}{5}x$(만 원)
(할인매장에서 판매 가격)$=\dfrac{8}{5}x-10$(만 원)
할인매장에서 쿠폰을 사용하면 이 가격에서 25 % 할인을 더 받으므로
$\left(\dfrac{8}{5}x-10\right)\times\left(1-\dfrac{25}{100}\right)$
$=\left(\dfrac{8}{5}x-10\right)\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{6}{5}x-\dfrac{15}{2}$(만 원)
따라서 $a=\dfrac{6}{5}$, $b=\dfrac{15}{2}$에서
$5ab=5\times\dfrac{6}{5}\times\dfrac{15}{2}=45$

27. 두 지점 사이의 거리를 x km라고 하자.
민재가 왕복한 거리는 총 $2x$ km이고 시속 24 km로 이동하였으므로
(민재의 드론이 왕복하는 데 걸린 시간)
$=\dfrac{2x}{24}=\dfrac{x}{12}$(시간)
동규는 B 지점까지 시속 18 km로 갔다가 $\dfrac{1}{6}$시간 동안 멈춘 후 시속 20 km로 돌아왔으므로
(동규의 드론이 왕복하는 데 걸린 시간)
$=\dfrac{x}{18}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{x}{20}$
이때, 동규의 드론이 민재의 드론보다 $\dfrac{1}{2}$시간 늦게 돌아왔으므로
$\dfrac{x}{12}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{x}{18}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{x}{20}$
위 식의 양변에 180을 곱하여 정리하면
$15x+90=10x+30+9x$, $60=4x$ $\quad\therefore x=15$
따라서 두 지점 사이의 거리는 15 km이다.

28. $3x-3a=[a-8]$에서 x가 정수, 우변도 정수이므로 $3a$도 정수이어야 한다.
a는 정수가 아닌 유리수이고, $3a$가 정수이므로
$a=\dfrac{k}{3}$ (단, k는 3과 서로소)로 놓자.

(i) $k=1$이면 $a=\dfrac{1}{3}$이므로
$3x-1=\left[\dfrac{1}{3}-8\right]$, $3x=-8+1$,
$\therefore x=-\dfrac{7}{3}$(음의 정수해가 아니다.)

(ii) $k=2$이면 $a=\dfrac{2}{3}$이므로
$3x-2=\left[\dfrac{2}{3}-8\right]$, $3x=-8+2$,
$\therefore x=-2$

(iii) $k=4$이면 $a=\dfrac{4}{3}$이므로
$3x-4=\left[\dfrac{4}{3}-8\right]$, $3x=-7+4$,
$\therefore x=-1$

(iv) $k=5$이면 $a=\dfrac{5}{3}$이므로
$3x-5=\left[\dfrac{5}{3}-8\right]$, $3x=-7+5$,

$\therefore x=-\frac{2}{3}$(음의 정수해가 아니다.)

(v) $k=7$이면 $a=\frac{7}{3}$이므로

$3x-7=\left[\frac{7}{3}-8\right]$, $3x=-6+7$,

$\therefore x=\frac{1}{3}$(음수가 아니다.)

즉, $k\geq 7$이면 음수인 해를 가지지 않는다.

(i)~(v)로부터 조건을 만족하는 a의 값은

$\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$이므로 $\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2$

29. $30^5=2^5\times 3^5\times 5^5$의 약수는 $2^a\times 3^b\times 5^c$(단, a, b, c는 5 이하의 자연수)의 꼴이다.

30^5의 약수 중 하나를 서로 다른 자연수의 곱이면서 가장 많은 자연수의 곱으로 나타내기 위해 먼저 1을 곱한다. 그 다음 소인수가 2, 3, 5가 되는 자연수를 작은 수부터 차례대로 곱해나가면서 전체 곱에서 2, 3, 5가 곱해진 수가 다섯 개를 넘지 않게 하면 된다.

(i) $1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6$

$=2\times 3\times 2^2\times 5\times(2\times 3)=2^4\times 3^2\times 5$

7은 30^5의 약수가 아니므로 제외하고, $8=2^3$을 곱하면 전체 곱이 2^7의 배수가 되므로 제외한다.

(ii) $(1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6)\times 9$

$=(2^4\times 3^2\times 5)\times 3^2=2^4\times 3^4\times 5$

(iii) $(1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 9)\times 10$

$=(2^4\times 3^4\times 5)\times 2\times 5=2^5\times 3^4\times 5^2$

(iv) 다음으로 더 곱해지는 수는 3 하나와 5 세 개로 만들 수 있는 10보다 큰 수이므로

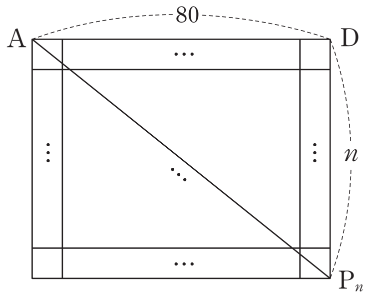
$15=3\times 5$, $25=5^2$이다. 즉

$(1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 9\times 10)\times 15\times 25$

$=(2^5\times 3^4\times 5^2)\times(3\times 5)\times 5^2=2^5\times 3^5\times 5^5$

따라서 (iv)에서 30^5은 최대 10개의 서로 다른 자연수의 곱으로 나타낼 수 있다.

30. 그림과 같이 가로가 AD이고, 대각선이 선분 AP_n인 직사각형은 가로, 세로의 길이가 각각 80, n이다.(단, $n=1, 2, \cdots, 99$)



이때, 80과 n이 서로소이면 선분 AP_n은 정사각형의 꼭짓점을 하나도 지나지 않는다.

$80=2^4\times 5$이므로 n의 소인수 중 2와 5가 없는 수를 찾으면 된다.

1부터 99까지의 자연수 중 2의 배수는 49개, 5의 배수는 19개이고, 2와 5의 공배수인 10의 배수는 9개이다.

따라서 구하는 선분의 개수는

$99-49-19+9=40$