KMA 한국수학학력평가(하반기) 정답과 해설

중학교 1학년

1.	70	**2.**	③
3.	4	**4.**	360
5.	36	**6.**	5
7.	19	**8.**	④
9.	35	**10.**	60
11.	12	**12.**	162
13.	7	**14.**	16
15.	216	**16.**	126
17.	24	**18.**	45
19.	47	**20.**	1
21.	232	**22.**	54
23.	24	**24.**	102
25.	960	**26.**	143
27.	15	**28.**	60
29.	30	**30.**	28

1. $\angle AOC+\angle BOD$
$=(\angle AOB+\angle BOC)+(\angle BOC+\angle COD)$
$=2\angle BOC+(\angle AOB+\angle COD)$
$=2\angle BOC+40^\circ=180^\circ$
$\therefore\ \angle BOC=70^\circ$
$\angle EOF$는 $\angle BOC$의 맞꼭지각이므로
$\angle EOF=70^\circ$이다.

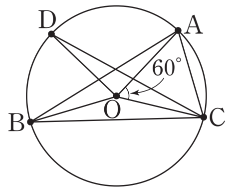
2. ① $\angle a$의 동위각은 $\angle e$와 $\angle l$이다.
② 평행선일 때만 엇각의 크기가 같다.
④ $\angle g$의 동위각은 $\angle k$와 $\angle c$이다.
⑤ $\angle i$의 엇각은 $\angle g$와 $\angle d$이므로 2개이다.
따라서 옳은 것은 ③이다.

3. ㉡, ㉣은 각각 점 A, B를 중심으로 하고 반지름의 길이가 서로 같은 원의 일부분이므로 $\overline{AP}=\overline{BP}$이다. (ㄱ, 참)
㉠은 점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{OA}$인 원의 일부분이므로 $\overline{OA}=\overline{OB}$이다.
(ㄴ, 참)
$\angle O=60^\circ$일때만 $\overline{OA}=\overline{AB}$이다.(ㄷ, 거짓)
㉢의 원과 ㉣의 원의 반지름의 길이가 다를 수 있다. (ㄹ, 거짓)
작도순서는 ㉠ → (㉡,㉣) → ㉢ 이다. (ㅁ, 참)
$\angle POC=\angle POD$, $\angle PCO=\angle PDO=90^\circ$, $\overline{OP}$는 공통이므로 $\triangle POC\equiv\triangle POD$이다.
따라서 $\overline{PC}=\overline{PD}$이다. (ㅂ, 참)
$\angle AOE=\angle BOF$, $\angle AEO=\angle BFO=90^\circ$, $\overline{OA}=\overline{OB}$이므로 $\triangle AOE\equiv\triangle BOF$이다.
따라서 $\overline{AE}=\overline{BF}$이다. (ㅅ, 거짓)

4. 우체국 위쪽의 삼각형과 아래쪽의 삼각형에서 두 변의 길이가 425 m, 305 m로 각각 같고, 두 변 사이에 끼인 각은 맞꼭지각으로 같으므로 두 삼각형은 SAS 합동이다. 따라서 공원에서 치킨 가게까지의 거리는 360 m이다.

5. 9개 도시 사이에 직항 노선을 개설하는 것은 구각형의 대각선의 수와 변의 수를 더한 것과 같다.
구각형의 대각선의 수는 $\dfrac{9\times(9-3)}{2}=27$개, 변의 수는 9개이므로 총 직항 노선의 개수는 36개이다.

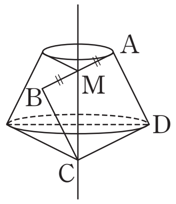
6. $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$를 긋고 $\angle AOD=x^\circ$라 하자.



$\triangle AOC$에서
$\overline{OC}=\overline{AC}=\overline{AO}$이므로
$\triangle AOC$는 정삼각형이다.
$\angle COA=60^\circ$, $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$이므로
$\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=60^\circ+x^\circ$
$\angle AOB+\angle BOC+\angle COD-\angle AOD=360^\circ$
$3(60^\circ+x^\circ)-x^\circ=360^\circ$
$\therefore\ x^\circ=90^\circ$
호의 길이는 중심각의 크기에 정비례하므로
$\overset{\frown}{AD}$는 원의 둘레의 $\dfrac{1}{4}$이다.
따라서 $p+q=4+1=5$이다.

7. 문제에서 설명하는 다면체는 각뿔이고, 잘랐을 때 면의 개수가 더 많은 것은 각뿔대이다. 각뿔대의 밑면이 n각형이면, 모서리의 개수는 $3n$개이므로 입체도형 A는 육각뿔대이다. 자르기 전

의 다면체는 육각뿔이므로 꼭짓점의 개수는 7, 모서리의 개수는 12이다.
따라서 $a+b=7+12=19$

8. 

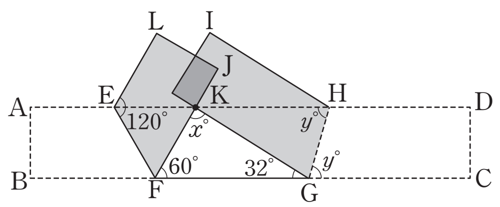
주어진 도형을 회전시키면 왼쪽 그림과 같다.

9. $4^3=64$이므로 정육면체의 한 모서리의 길이는 4 cm이다. □ABCD 넓이는 정육면체 밑면의 넓이의 $\frac{1}{2}$이므로 8 cm^2이다.
사각뿔 E−ABCD의 높이는 4 cm이므로 부피는 $8\times4\times\frac{1}{3}=\frac{32}{3}$ cm^3이다.
따라서 $p+q=3+32=35$

10. 큰 반구의 반지름의 길이는 5 cm이므로 부피는
$\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi\times5^3=\frac{2}{3}\pi\times125(cm^3)$
작은 두 반구의 부피는 각각
$\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi\times2^3=\frac{2}{3}\pi\times8(cm^3)$,
$\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi\times3^3=\frac{2}{3}\pi\times27(cm^3)$이므로 주어진 도형의 부피는
$\frac{2}{3}\pi\times125-\frac{2}{3}\pi\times8-\frac{2}{3}\pi\times27$
$=\frac{2}{3}\pi(125-8-27)$
$=\frac{2}{3}\pi\times90=60\pi(cm^3)$이다.

11. 직선 PR와 꼬인위치에 있는 모서리는 $\overline{BF}$, $\overline{QG}$, $\overline{DH}$, $\overline{AE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$, $\overline{HE}$이므로 $a=8$이다.
평면 BFGQP와 평행한 면은 면 AEHD이므로 $b=1$이다. 평면 GHDRQ에 수직인 모서리는 $\overline{AD}$, $\overline{BP}$, $\overline{FG}$, $\overline{EH}$이므로 $c=4$이다.
따라서 $a\times b+c=8\times1+4=12$

12.



종이를 접었으므로 $\angle AEF=\angle LEF=120^\circ$ 이고, $\angle AEK=180^\circ$이므로 $\angle FEK=60^\circ$이다.
$\overline{AD}/\!/\overline{BC}$이므로 $\angle FEK=\angle EFB=60^\circ$(엇각) 이고, 종이를 접었으므로
$\angle EFB=\angle EFK=60^\circ$이다.
삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180°이므로
삼각형 KFG에서 $x^\circ=180^\circ-(60^\circ+32^\circ)=88^\circ$
마찬가지로 $\angle CGH=\angle HGK=y^\circ$이다.
$32^\circ+2y^\circ=180^\circ$이므로 $y^\circ=74^\circ$이다.
따라서 $x+y=88+74=162$

13. (i) $2a-1\leq3<6$(㉠)인 경우
$a=1$이면 $2a-1=1$, $a=2$이면 $2a-1=3$ 이다. ∴ ㉠ 조건을 만족시킨다.
$2a-1+3>6$, $2a+2>6$(㉡)에서
$a=1$이면 $2a+2=4$, $a=2$이면 $2a+2=6$ 이므로 ㉡ 조건을 만족하는 자연수는 없다.
(ii) $3<2a-1\leq6$(㉢)인 경우
$a=1, 2, 3, 4$일 때 $2a-1$의 값을 각각 구해보면 1, 3, 5, 7이므로 ㉢ 조건을 만족시키는 $a=3$이다.
$3+(2a-1)>6$, $2a+2>6$(㉣)에서
$a=3$이면 $2a+2=8>6$이므로 $a=3$은 ㉣ 조건도 만족시킨다.
(iii) $3<6<2a-1$(㉤)인 경우
$a=1, 2, 3, 4, 5$일 때 $2a-1$의 값을 각각 구해보면 1, 3, 5, 7, 9이므로 $a\geq4$일 때 ㉤ 조건을 만족시킨다.
$3+6>2a-1$, $9>2a-1$(㉥)
㉥ 조건을 만족시키는 자연수 a의 값은 4이다.
따라서 가능한 자연수 a의 값의 합은 $3+4=7$ 이다.

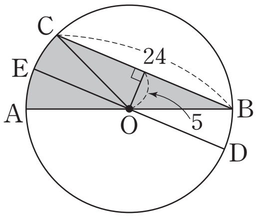
14. △ABC의 한 변의 길이는 8, △CDE의 높이는 4이므로 △BCE의 넓이는 $8\times4\times\frac{1}{2}=16$이다.
△ABC와 △CDE는 정삼각형이므로
$\overline{BC}=\overline{AC}$, $\overline{CE}=\overline{CD}$이다.
$\angle BCE=\angle ACD=120^\circ$이므로
△BCE≡△ACD이다.
따라서 △ACD의 넓이는 16이다.

15. 한 꼭짓점에서 그을 수 있는 대각선의 개수가 9개인 다각형은 십이각형이다. 십이각형의 내각

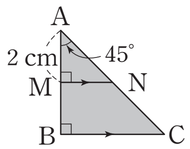
의 크기의 합은 $180^\circ\times(12-2)=1800^\circ$이고 외각의 크기의 합은 360°이므로

$\dfrac{x+y}{10}=\dfrac{1800+360}{10}$

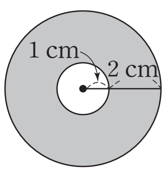
$=216$이다.



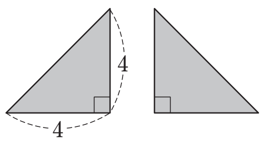
16. $\angle$CBA와 $\angle$BOD는 엇각이고 $\angle$CBA$=\angle$BOD이므로 $\overline{\text{BC}}\,/\!/\,\overline{\text{DO}}$이다.
$\overrightarrow{\text{DO}}$가 원 O와 만나는 점을 E라 하자. $\triangle$OBC는 $\overline{\text{OB}}=\overline{\text{OC}}$인 이등변삼각형이므로
$\angle$CBO$=\angle$BCO이다.
$\overline{\text{BC}}\,/\!/\,\overline{\text{DE}}$이므로 $\angle$BCO$=\angle$EOC(엇각),
$\angle$CBO$=\angle$EOA(동위각)이다. 즉, 세 부채꼴 DOB, AOE, EOC의 중심각의 크기가 같으므로 부채꼴 AOC의 넓이는 66이다.
현 BC는 원의 중심으로부터 거리가 5이므로
$\triangle$OBC의 넓이는 $24\times5\times\dfrac{1}{2}=60$이다.
따라서 색칠된 도형의 넓이는 $66+60=126$이다.



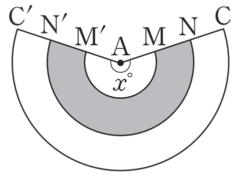
17. $\overline{\text{AB}}$의 중점 M을 지나면서 회전축에 수직인 평면으로 잘랐을 때 $\overline{\text{AC}}$와 평면의 교점을 N이라 하자. $\overline{\text{BC}}$에 평행하는 평면으로 잘랐으므로 $\angle$AMN$=90^\circ$이고 $\angle$BAC$=45^\circ$이므로
$\triangle$AMN은 직각이등변삼각형이다.
$\overline{\text{AM}}=2(\text{cm})$이므로 $\overline{\text{MN}}=2(\text{cm})$이다.



점 M을 지나면서 회전축에 수직인 평면으로 자른 단면은 지름이 3 cm인 원의 넓이에서 지름이 1 cm인 원의 넓이를 뺀 것과 같으므로 $9\pi-\pi=8\pi(\text{cm}^2)$이다.



회전축을 포함하는 평면으로 잘랐을 때 생기는 단면은 그림과 같으므로 단면의 넓이는
$2\times4\times4\times\dfrac{1}{2}=16(\text{cm}^2)$이다.



따라서 $a+b=8+16=24$이다.

18. 삼각형 ABC를 직선 l을 회전축으로 1회전시킬 때 생기는 회전체는 원뿔이고, 그 원뿔의 옆면의 전개도는 오른쪽 그림과 같다.
호 CC′의 길이는 밑면의 둘레와 같으므로 $2\pi\times9=18\pi$이다. 부채꼴의 중심각의 크기를 x°라 하면 $30\pi\times\dfrac{x^\circ}{360^\circ}=18\pi$이므로 $\dfrac{x^\circ}{360^\circ}=\dfrac{3}{5}$이다.
선분 MN에 의해 생기는 회전체의 겉넓이는 부채꼴 NAN′의 넓이에서 부채꼴 MAM′의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$100\pi\times\dfrac{x^\circ}{360^\circ}-25\pi\times\dfrac{x^\circ}{360^\circ}$

$=(100\pi-25\pi)\times\dfrac{x^\circ}{360^\circ}$

$=75\pi\times\dfrac{3}{5}=45\pi$이다.

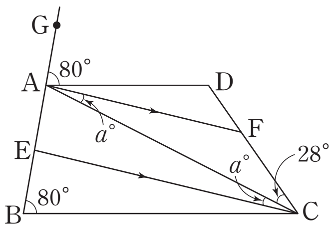
따라서 $a=45$이다.

19. 주어진 용기에 담을 수 있는 물의 최대 부피는 정육면체 부피에서 삼각뿔 부피를 뺀 것과 같다.
$12^3-\left(36\times\dfrac{1}{2}\right)\times6\times\dfrac{1}{3}=1692$
원뿔 모양 그릇 하나의 부피는
(원주율)$\times3^2\times4\times\dfrac{1}{3}=3\times9\times\dfrac{4}{3}=36$이다.
$1692\div36=47$이므로 최대 47개의 그릇을 채울 수 있다.

20. 4개의 공이 한 변의 길이가 24 cm인 정사각형 면에 꼭 맞으므로 공의 반지름의 길이는 6 cm이다.
따라서 공들의 겉넓이의 합은
$(4\times4\times36\pi)\,\text{cm}^2$이다. $a=4\times4\times36\pi$
지름이 8 cm인 공은 가로, 세로 각 3개씩하여 총 9개가 들어갈 수 있다. 따라서 이 공들의 겉넓이의 합은 $(9\times4\times16\pi)\,\text{cm}^2$이다.
$b=9\times4\times16\pi$

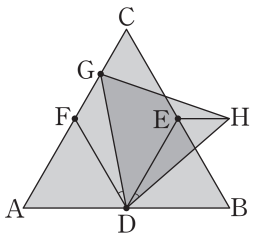
$\dfrac{a}{b}=\dfrac{4\times4\times36\pi}{9\times4\times16\pi}=1$

21. $\overline{AF}/\!/\overline{EC}$이므로



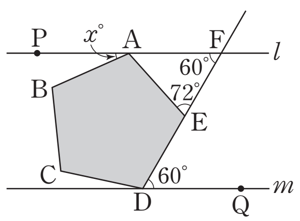
$\angle CAF=\angle ACE$
(엇각)이다.
$\angle CAF=a^{\circ}$라 하자.
$\angle CAD=\angle ACB$
$=2a^{\circ}$
이고 $\angle CAD$와 $\angle ACB$는 엇각이므로
$\overline{AD}/\!/\overline{BC}$ 이다.
$\angle ADC+\angle DCB=180^{\circ}$이므로
$\angle ADC=180^{\circ}-(28^{\circ}+2a^{\circ})=152^{\circ}-2a^{\circ}$
반직선 BA위의 점을 G라 하면 $\overline{AD}/\!/\overline{BC}$이므로 $\angle DAG=\angle CBA=80^{\circ}$(동위각),
$\overline{AF}/\!/\overline{EC}$이므로
$\angle CEA=\angle FAG=80^{\circ}+a^{\circ}$(동위각)
$\therefore\ \angle ADC+\angle CEA+\angle ECB$
$=(152^{\circ}-2a^{\circ})+(80^{\circ}+a^{\circ})+a^{\circ}=232^{\circ}$

22. $\overline{AF}=\overline{BE}$, $\overline{AD}=\overline{BD}$,



$\angle FAD=\angle EBD$
$=60^{\circ}$이므로
$\triangle ADF\equiv\triangle BDE$
이다.
또한 $\triangle ADF$와 $\triangle BDE$는 정삼각형이다.
$\angle FDG=x^{\circ}$라 하면
$\angle FDG=\angle FDE-\angle GDE$
$=60^{\circ}-\angle GDE$
$=\angle GDH-\angle GDE$
$=\angle EDH$
$\triangle ADF\equiv\triangle BDE$이므로 $\overline{FD}=\overline{ED}$, $\triangle DHG$는 정삼각형이므로 $\overline{GD}=\overline{HD}$이다.
따라서 $\triangle FDG\equiv\triangle EDH$이다.
$\overline{DE}=\overline{DB}=36$, $\overline{EH}=\overline{FG}=18$이므로 두 선분의 길이의 합은 54이다.

23. 직선 DE가 직선 l과 만나는 점을 F라 하자.



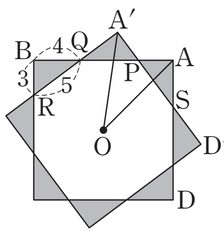
$l/\!/m$이므로
$\angle QDF=\angle AFD$
(엇각)이다. 정오각형의 한 내각의 크기는 108°이므로
$\angle AEF=180^{\circ}-108^{\circ}=72^{\circ}$이다.
$\triangle AEF$에서 $60^{\circ}+72^{\circ}+\angle EAF=180^{\circ}$이므로
$\angle EAF=48^{\circ}$이다.
$x^{\circ}+108^{\circ}+48^{\circ}=180^{\circ}$이므로 $x^{\circ}=24^{\circ}$

24. 정사면체의 면은 정삼각형이고, 정삼각형의 꼭짓점은 3개이다. 정삼각형이 총 4개이고, 한 꼭짓점에 모인 면의 개수가 $\boxed{3}$개이므로 3×4에서 각 꼭짓점은 $\boxed{3}$번씩 세어진다. 따라서 정사면체의 꼭짓점의 개수는 $3\times4\div3=\boxed{4}$개이다.
같은 방법으로 정이십면체를 각 꼭짓점에 모이는 모서리의 $\dfrac{1}{3}$ 지점을 지나는 평면으로 자른 도형인 축구공 모양의 입체도형의 꼭짓점의 개수를 세어보자. 축구공은 오각형 $\boxed{12}$개와 육각형 $\boxed{20}$개로 이루어져 있고(★), 한 꼭짓점에 모이는 면의 개수는 $\boxed{3}$개이다. 따라서 축구공의 꼭짓점의 개수는 $12\times5\div3+20\times6\div3=\boxed{60}$개이다.
따라서 $a+b+c+d+e+f$
$=3+4+12+20+3+60=102$이다.

참고

(★)오각형의 개수는 정이십면체의 꼭짓점의 개수와 같고, 육각형의 개수는 정이십면체의 면의 개수와 같다. 따라서 정이십면체의 꼭짓점의 개수는 $\dfrac{3\times20}{5}=12$(개)이다.

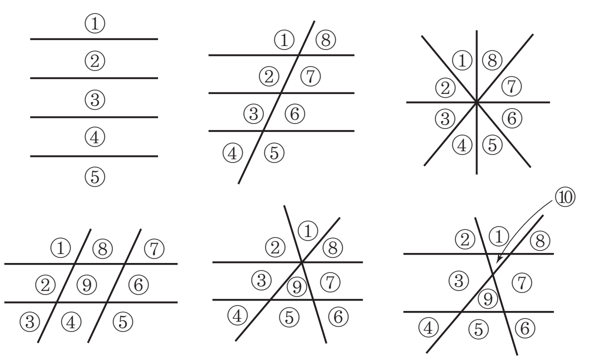
25. 주어진 그림을 왼쪽 정면에서 바라보면 오른쪽 그림과 같다.

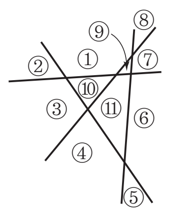


정사각형을 면의 중심을 기준으로 회전시켰으므로 색칠된 8개의 삼각형은 합동이고 또한 직각삼각형이다.
$\overline{OA}=\overline{OA'}$이므로 $\triangle OAA'$은 이등변삼각형이다. $\angle OA'D'=\angle OAB=45^{\circ}$이므로
$\angle PA'A=\angle OA'A-45^{\circ}$
$=\angle OAA'-45^{\circ}=\angle PAA'$이다.
따라서 $\triangle PAA'$은 이등변삼각형이고
$\overline{PA}=\overline{PA'}$이다.
$\triangle PAS$와 $\triangle PA'Q$에서 $\overline{PA}=\overline{PA'}$,

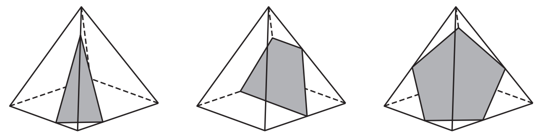
$\angle \mathrm{PAS} = \angle \mathrm{PA'Q} = 90^\circ$,
$\angle \mathrm{APS} = \angle \mathrm{A'PQ}$(맞꼭지각)이므로
$\triangle \mathrm{PAS} \equiv \triangle \mathrm{PA'Q}$이다.
위와 마찬가지로 $\overline{\mathrm{QB}} = \overline{\mathrm{QA'}}$임을 설명할 수 있고 $\triangle \mathrm{QA'P} \equiv \triangle \mathrm{QBR}$임을 알 수 있다.
이를 반복하면 색칠된 여덟 개의 삼각형이 모두 합동임을 알 수 있다.
따라서 처음 정육면체의 한 모서리의 길이는 $3+5+4=12$이다.
주어진 입체도형의 겉넓이는 처음 정육면체의 겉넓이에서 밑변이 3, 높이가 4인 직각삼각형 16개의 넓이를 더한 것과 같다.
$\therefore\ 12 \times 12 \times 6 + 3 \times 4 \times \dfrac{1}{2} \times 16 = 960$

26. 네 직선이 모두 서로 평행할 때 영역의 개수는 5개이다.
세 직선만 서로 평행할 때 영역의 개수는 8개이다.
네 직선이 모두 한 점에서 만날 때 영역의 개수는 8개이다.
두 쌍의 직선끼리만 서로 평행할 때 영역의 개수는 9개이다.
두 쌍의 직선이 평행하고 나머지 두 직선이 평행한 직선 위의 한 점에서 만날 때 영역의 개수는 9개이다.
두 쌍의 직선이 평행하고 나머지 두 직선이 평행한 직선 밖의 한 점에서 만날 때 영역의 개수는 10개이다.
평행한 직선이 하나도 없을 때 영역의 개수는 11개이다.
따라서 $a_1=5$, $a_2=8$, $a_3=9$, $a_4=10$, $a_5=11$이고
$a_1+2a_2+3a_3+4a_4+5a_5$
$=5+16+27+40+55=143$이다.



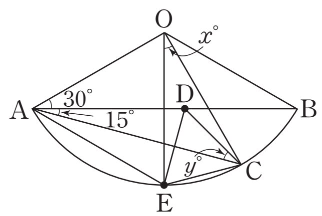


27.



사각뿔을 한 평면으로 잘랐을 때 단면으로 가능한 다각형은 삼각형, 사각형, 오각형이다. 또한 꼭짓점의 개수가 많아지기 위해서는 자르는 평면이 사각뿔의 꼭짓점을 지나지 않아야 한다.
단면이 삼각형일 때 두 입체도형의 꼭짓점의 개수의 합의 최댓값은 $5+3\times2=11$이다.
단면이 사각형일 때 두 입체도형의 꼭짓점의 개수의 합의 최댓값은 $5+4\times2=13$이다.
단면이 오각형일 때 두 입체도형의 꼭짓점의 개수의 합의 최댓값은 $5+5\times2=15$이다.
따라서 한 평면으로 잘라 만든 두 입체도형의 꼭짓점 개수의 합의 최댓값은 15이다.

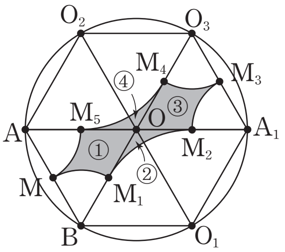
28.



$\triangle \mathrm{OAB}$는 $\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OB}}$인 이등변삼각형이므로
$\angle \mathrm{OAB} = (180^\circ - 120^\circ) \div 2 = 30^\circ$이다.
종이를 펼쳤을 때 점 D에 대응하는 점이 점 E이므로 $\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{AE}}$이다.
$\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OE}} = \overline{\mathrm{AE}}$이므로 $\triangle \mathrm{OAE}$는 정삼각형이고, $\angle \mathrm{EAO} = 60^\circ$이다.
또한 종이를 접었으므로 $\angle \mathrm{EAC} = \angle \mathrm{CAD}$이고 $\angle \mathrm{EAC} + \angle \mathrm{CAD} = 30^\circ$이므로
$\angle \mathrm{CAD} = 15^\circ$이다.
$\triangle \mathrm{OAC}$는 $\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OC}}$인 이등변삼각형이므로
$\angle \mathrm{OAC} = \angle \mathrm{ACO} = 45^\circ$, $\angle \mathrm{AOC} = 90^\circ$이다.
$\angle \mathrm{AOE} = 60^\circ$이므로 $\angle \mathrm{EOC} = x^\circ = 30^\circ$이다.
$\overline{\mathrm{AE}} = \overline{\mathrm{OE}}$, $\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{OC}}$, $\angle \mathrm{EAD} = \angle \mathrm{EOC} = 30^\circ$이므로 $\triangle \mathrm{AED} \equiv \triangle \mathrm{OEC}$이다.
이때 $\overline{\mathrm{DE}} = \overline{\mathrm{CE}}$이고, 종이를 접었으므로

$\overline{CD}=\overline{CE}$이다. 따라서 $\triangle DEC$는 정삼각형이다. 또한 $\angle ACD=\angle ACE$이므로 $\angle ACD=y°=30°$이다.
따라서 $x+y=60$

29. 삼각형 OAB가 한 바퀴 돌아 제자리로 오는 동안 점 M이 움직인 곡선으로 둘러싸인 도형은 오른쪽 그림과 같다. 점 O, M_5, M, M_1으로 이루어진 도형을 ①, 점 O, M_1, M_2으로 이루어진 도형을 ②, 점 O, M_2, M_3, M_4으로 이루어진 도형을 ③, 점 O, M_4, M_5으로 이루어진 도형을 ④라 하면



(①의 넓이)$=$(③의 넓이),
(②의 넓이)$=$(④의 넓이)이다.
①의 넓이는 $\triangle OAB$의 넓이에서 부채꼴 MAM_5와 부채꼴 M_1BM의 넓이를 뺀 것이다.

$$\frac{1}{2}\times6\times h-2\left(9\pi\times\frac{60}{360}\right)=3h-3\pi$$

②의 넓이는 $\square OM_1O_1M_2$의 넓이에서 부채꼴 $M_1O_1M_2$의 넓이를 뺀 것이다.
$\square OM_1O_1M_2$의 넓이는 $\triangle OM_1O_1$과 $\triangle OO_1M_2$의 넓이를 더한 것과 같고, 각 삼각형은 정삼각형의 넓이의 $\frac{1}{2}$이므로 $\square OM_1O_1M_2$의 넓이는 $\triangle OAB$의 넓이와 같다.

$$\frac{1}{2}\times6\times h-h^2\pi\times\frac{60}{360}=3h-\frac{h^2}{6}\pi$$

따라서 구하고자 하는 도형의 넓이는

$$①+③+②+④$$
$$=2(3h-3\pi)+2\left(3h-\frac{h^2}{6}\pi\right)$$
$$=-\frac{\pi}{3}h^2+12h-6\pi$$

이므로 $a=-\frac{\pi}{3}$, $b=12$, $c=-6\pi$이다.

$$c\div a+b=(-6\pi)\div\left(-\frac{\pi}{3}\right)+12=18+12=30$$

30. 원기둥의 높이를 h_1, 사각기둥의 높이를 h_2라 하자.
반구의 부피는 $\left(\frac{2}{3}\pi\times125\right)\text{cm}^3$, 원기둥의 부피는 $25h_1\pi\ \text{cm}^3$, 사각기둥의 부피는 $25h_2\ \text{cm}^3$이다.
세 용기의 부피가 같으므로
$25h_1\pi=\frac{2}{3}\times125$에서 $h_1=\frac{10}{3}$(cm),
$25h_2=\frac{2}{3}\pi\times125$에서 $h_2=\frac{10}{3}\pi$(cm)이다.
반구의 겉넓이는
$\frac{1}{2}\times4\pi\times5^2+\pi\times5^2=75\pi(\text{cm}^2)$,
원기둥의 겉넓이는
$2\times25\pi+10\pi\times\frac{10}{3}=\frac{250}{3}\pi(\text{cm}^2)$,
사각기둥의 겉넓이는
$25\times2+20\times\frac{10}{3}\pi=50+\frac{200}{3}\pi(\text{cm}^2)$이다.
$\frac{250}{3}\pi=75\pi+\frac{25}{3}\pi$이므로
(반구의 겉넓이)$<$(원기둥의 겉넓이)이다.
$\frac{250}{3}\pi=\frac{200}{3}\pi+\frac{50}{3}\pi$이고 $\frac{50}{3}\pi>50$이므로
(사각기둥의 겉넓이)$<$(원기둥의 겉넓이)이다.
$75\pi=\frac{200}{3}\pi+\frac{25}{3}\pi$이고 $\frac{25}{3}\pi<\frac{100}{3}<50$이므로 (반구의 겉넓이)$<$(사각기둥의 겉넓이)이다.
따라서 아이스크림이 가장 빨리 녹는 것은 원기둥 모양의 용기이고, 가장 천천히 녹는 것은 반구 모양의 용기이다.
$\frac{250}{3}\pi-75\pi=\frac{25}{3}\pi$이므로 $p+q=3+25=28$이다.