KMA 한국수학학력평가(하반기) 정답과 해설

중학교 2학년

1. 111	**2.** 170
3. 45	**4.** 75
5. 150	**6.** 10
7. 399	**8.** 60
9. 224	**10.** 15
11. 97	**12.** 225
13. 35	**14.** 50
15. 101	**16.** 405
17. 100	**18.** 385
19. 155	**20.** 242
21. 178	**22.** 13
23. 33	**24.** 43
25. 82	**26.** 96
27. 35	**28.** 47
29. 23	**30.** 64

1. $\triangle$ABF는 $\overline{AF}=\overline{BF}$인 이등변삼각형이므로
$\angle ABF=\angle BAF=23^\circ$이다.
$\angle BFE=46^\circ$이고 $\triangle$FEB는 이등변삼각형이므로 $\angle BEF=46^\circ$이다.
$\angle FBE=180^\circ-(46^\circ+46^\circ)=88^\circ$,
$\angle EBC=\angle ECB=69^\circ$이므로
$\angle ECD=111^\circ$이다.
$\therefore x=111$

2. 이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 서로 같으므로
$\angle ABC=\angle ACB=70^\circ$
이등변삼각형의 꼭짓각의 이등분선은 밑변을 수직이등분하므로
$\overline{BD}=5$ cm, $\angle ADB=90^\circ$, $\overline{BC}=10$ cm
따라서 $k=10$, $l=90$, $m=70$이므로
$k+l+m=170$

3. $\triangle$ABE와 $\triangle$ADE에서
$\angle ABE=\angle ADE=90^\circ$
$\angle BAE=\angle DAE$, $\overline{AE}$는 공통이므로
$\triangle ABE\equiv\triangle ADE$(RHA 합동)
$\therefore \overline{BE}=\overline{DE}$
$\triangle$CDE에서 $\angle C=\angle DEC=45^\circ$이므로
$\overline{CD}=\overline{DE}$이다.
$\overline{BE}=3$ cm이므로 $\overline{CD}=\overline{DE}=3$ cm
($\triangle$DEC의 넓이)$=\frac{1}{2}\times3\times3=\frac{9}{2}$(cm^2)
따라서 구하는 값은 $10\times\frac{9}{2}=45$이다.

4. 직사각형에서 두 대각선은 길이가 같고 서로 다른 것을 이등분하므로
$\overline{AO}=10$ cm $\quad\therefore x=10$
$\angle CAB=65^\circ$이고
$\triangle CAB\equiv\triangle BDC$(SSS 합동)이므로
$\angle BDC=65^\circ \quad\therefore y=65$
$\therefore x+y=75$

5. $\overline{BE}=\overline{BA}$이므로 $\triangle$BEA는 이등변삼각형이고
$\angle EBA=30^\circ$이다.
$\angle EAB=\frac{1}{2}\times(180^\circ-30^\circ)=75^\circ$
$\angle EAC=\angle EAB-\angle CAB$
$=75^\circ-45^\circ=30^\circ$
따라서 $x=30$이므로 $5x=150$

6. 두 대각선의 길이가 같은 사각형은
직사각형, 정사각형, 등변사다리꼴이므로
$1+4+5=10$

7. $\overline{BC}:\overline{FG}=\overline{AB}:\overline{EF}$이므로
$5:3=4:\overline{EF}$에서 $\frac{12}{5}$ cm
$\angle D=125^\circ$이므로 $\angle H=125^\circ$이다.
따라서 $x=\frac{12}{5}$, $y=125$이므로
$10x+3y=10\times\frac{12}{5}+3\times125=399$

8. $\triangle$CAB와 $\triangle$CED에서
$\angle ACB=\angle ECD$, $\angle CAB=\angle CED=90^\circ$이므로 $\triangle$CAB와 $\triangle$CED는 AA 닮음이다.
$\overline{AC}:\overline{AB}=\overline{CE}:\overline{ED}$이므로
$8:6=80:\overline{ED}$, $8\overline{ED}=480$
$\overline{ED}=60$(m) $\quad\therefore x=60$

9. $9:15=12:x$이므로

$x=\dfrac{15\times12}{9}=20$

$15:27=20:z$이므로

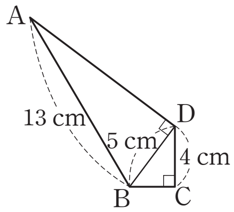
$z=\dfrac{20\times27}{15}=36$

$9:15=8:y$이므로

$y=\dfrac{15\times8}{9}=\dfrac{40}{3}$

$\therefore\ 2x+3y+4z=40+40+144=224$

10. □ABCD를 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$\overline{AB}^2=\overline{BD}^2+\overline{AD}^2$에서

$13^2=5^2+x^2$이고

$13^2=5^2+12^2$이므로

$x=12$

$\overline{BD}^2=\overline{BC}^2+\overline{CD}^2$에서 $5^2=y^2+4^2$이고

$5^2=3^2+4^2$이므로 $y=3$

$\therefore\ x+y=15$

11. $\overline{AD}:\overline{DB}=2:1$, $\overline{BE}:\overline{EC}=1:2$이므로

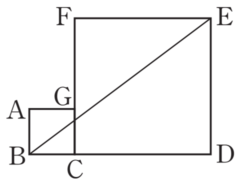
$\overline{DE}:\overline{AC}=1:3$, $5:\overline{AC}=1:3$

$\therefore\ \overline{AC}=15$

$\overline{CD}^2+\overline{AE}^2=\overline{DE}^2+\overline{AC}^2$이므로

$x+153=25+225$, $x=97$

12. $\square ABCG=9\text{ cm}^2$, $\square FCDE=81\text{ cm}^2$이므로 $\overline{BC}=3\text{ cm}$, $\overline{CD}=\overline{DE}=9\text{ cm}$



이때 △BDE는 직각삼각형이므로 $\overline{BD}^2+\overline{DE}^2=\overline{BE}^2$

따라서 $\overline{BE}$를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는 $\overline{BE}^2$이므로

$12^2+9^2=225(\text{cm}^2)$

$\therefore\ x=225$

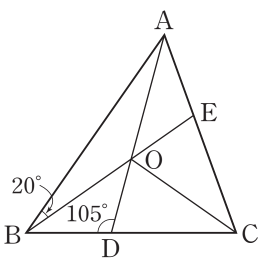
13. $\overline{OA}=\overline{OB}$이므로

$\angle BAO=20^\circ$

$\angle BOD=40^\circ$,

$\angle DBO=35^\circ$

△OBC는 이등변삼각형이므로 $\angle OCB=35^\circ$



$\overline{BO}$의 연장선과 $\overline{AC}$가 만나는 점을 E라 하면

$\angle AOE=40^\circ$, $\angle COE=70^\circ$, $\angle AOC=110^\circ$

△AOC는 이등변삼각형이므로

$\angle CAO=35^\circ$

$\therefore\ x=35$

14. $\overline{AE}=\overline{DE}$이므로 $\angle EAD=\angle EDA=40^\circ$

$\angle BCD=40^\circ$이므로 $\angle ABC=100^\circ$

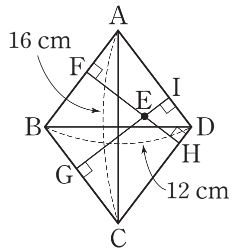
△ABC는 $\overline{AB}=\overline{BC}$인 이등변삼각형이다.

점 F는 △ABC의 내심이므로 $\angle ABF=50^\circ$

$\therefore\ x=50$

15. 마름모 ABCD의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times16\times12=96(\text{cm}^2)$



점 E에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 F, 점 E에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 G, 점 E에서 $\overline{CD}$에 내린 수선의 발을 H, 점 E에서 $\overline{DA}$에 내린 수선의 발을 I라 하자.

$\square ABCD=\triangle ABE+\triangle BCE+\triangle CDE+\triangle AED$

이므로

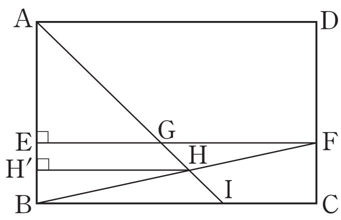
$96=\dfrac{1}{2}\times10\times(\overline{EF}+\overline{EG}+\overline{EH}+\overline{EI})$

$\overline{EF}+\overline{EG}+\overline{EH}+\overline{EI}=\dfrac{96}{5}$

따라서 $p=5$, $q=96$이므로

$p+q=5+96=101$

16.



$\overline{EF}=\overline{BC}$이고 $\overline{EG}:\overline{BI}=2:3=4:6$,

$\overline{BI}:\overline{IC}=2:1=6:3$이므로

$\overline{EG}:\overline{IC}=4:3$, $\overline{EG}:\overline{GF}=4:5$이다.

그러므로 $\overline{GF}:\overline{BI}=5:6$, $\overline{GH}:\overline{HI}=5:6$이다.

$\overline{AG}:\overline{GI}=2:1=22:11$이므로

$\overline{AG}:\overline{GH}:\overline{HI}=22:5:6$, $\overline{AG}:\overline{GH}=22:5$

$\overline{EG}:\overline{H'H}=22:27$이다.

$\triangle AEG:\triangle ABH=(2\times22):(3\times27)$

$=44:81$

$\triangle ABH = \dfrac{81}{44}\triangle AEG$

$k = \dfrac{81}{44}$, $220k = 405$

17. $\overline{CE}$는 $\angle C$의 이등분선이므로

$\angle ACE = \angle BCE$이고

$\overline{AE} : \overline{BE} = \overline{CA} : \overline{CB} = 15 : 9 = 5 : 3$이므로

$\overline{AE} = \dfrac{5}{5+3} \times 12 = \dfrac{15}{2}(\text{cm})$

$\overline{BE} = 12 - \dfrac{15}{2} = \dfrac{9}{2}(\text{cm})$

$\overline{CD}$는 중선이므로

$\overline{AD} = \dfrac{1}{2}\overline{AB} = \dfrac{1}{2} \times 12 = 6(\text{cm})$이고

$\overline{DE} = \overline{AE} - \overline{AD} = \dfrac{15}{2} - 6 = \dfrac{3}{2}(\text{cm})$

$\triangle AEC$에서 $\overline{AI}$를 그으면 $\angle CAI = \angle EAI$이므로

$\overline{CI} : \overline{EI} = \overline{AC} : \overline{AE} = 15 : \dfrac{15}{2} = 2 : 1$

$\triangle CDE$에서 $\overline{CG} : \overline{GD} = 2 : 1$이므로

$\overline{CG} : \overline{GD} = \overline{CI} : \overline{IE}$이다.

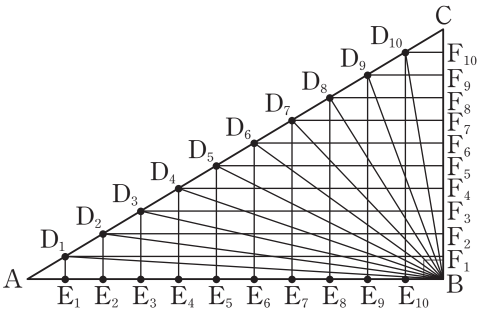
$\overline{DE} : \overline{GI} = \overline{CD} : \overline{CG} = 3 : 2$

$\dfrac{3}{2} : \overline{GI} = 3 : 2$이므로

$3\overline{GI} = 3$에서 $\overline{GI} = 1(\text{cm})$

따라서 $x = 1$이므로 $100x = 100 \times 1 = 100$

18.



점 D_i에서 $\overline{AB}$와 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 각각 E_i, F_i라 하자. ($i = 1, \dots, 10$)

이때 $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$라 하면

각 점 E_i는 $\overline{AB}$를 11등분하는 점이고, 각 점 F_i는 $\overline{BC}$를 11등분하는 점이므로

$\overline{D_1B}^2 = \left(\dfrac{10}{11}a\right)^2 + \left(\dfrac{1}{11}b\right)^2$

$\overline{D_2B}^2 = \left(\dfrac{9}{11}a\right)^2 + \left(\dfrac{2}{11}b\right)^2$

$\vdots$

$\overline{D_{10}B}^2 = \left(\dfrac{1}{11}a\right)^2 + \left(\dfrac{10}{11}b\right)^2$

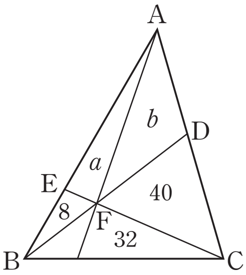
$\overline{D_1B}^2 + \overline{D_2B}^2 + \overline{D_3B}^2 + \cdots + \overline{D_{10}B}^2$

$= \dfrac{385}{121}(a^2 + b^2) = \dfrac{385}{121} \times 121 = 385$

19. $\triangle AEF$의 넓이를 a,

$\triangle AFD$의 넓이를 b

라 하자.



$\overline{EF} : \overline{FC} = 1 : 4$

$1 : 4 = a : (b + 40)$

$4a = b + 40$ ⋯⋯ ㉠

$\overline{BF} : \overline{FD} = 4 : 5$

$4 : 5 = (8 + a) : b$, $40 + 5a = 4b$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

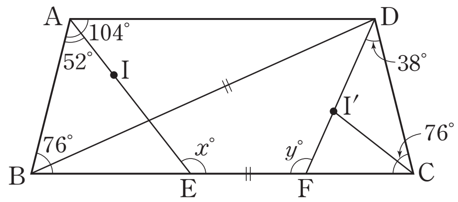
$a = \dfrac{200}{11}$, $b = \dfrac{360}{11}$

$\triangle ABC = \dfrac{200}{11} + \dfrac{360}{11} + 8 + 32 + 40 = \dfrac{1440}{11}$

따라서 $p = 11$, $q = 1440$이므로

$p + \dfrac{q}{10} = 11 + 144 = 155$

20.



$\overline{AD} /\!/ \overline{BC}$이므로 $\angle BAD = 104°$

$\overline{AI}$는 $\angle BAD$를 이등분하므로

$\angle BAE = 52°$

$\therefore\ \angle AEC = 52° + 76° = 128°$

$\triangle BCD$는 이등변삼각형이므로

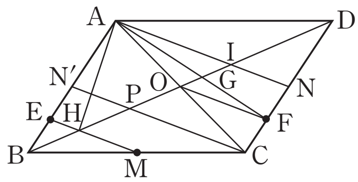
$\angle BDC = 76°$, $\angle FDC = 38°$

$\therefore\ \angle DFB = 38° + 76° = 114°$

따라서 $x = 128$, $y = 114$이므로

$x + y = 128 + 114 = 242$

21.



$\overline{CD}$의 중점을 N, $\overline{AN}$과 $\overline{BD}$의 교점을 I, $\overline{AB}$의 중점을 N′, $\overline{CN'}$과 $\overline{BD}$의 교점을 P라 하자.

점 P는 $\triangle ABC$의 무게중심, 점 I는 $\triangle ACD$의 무게중심이다.

$\therefore\ \square AEHG = \triangle AEH + \triangle AHG$

(ⅰ) △AEH의 넓이

$\overline{BD}=a$라 하면

$\overline{BH}=\frac{1}{2}\overline{BP}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\overline{BO}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\overline{BD}$

$=\frac{1}{6}\overline{BD}=\frac{1}{6}a$

$\triangle ABH=\frac{1}{6}\triangle ABD=\frac{1}{12}\square ABCD$

$\triangle AEH=\frac{3}{4}\triangle ABH$이므로

$\therefore\ \triangle AEH=\frac{1}{16}\square ABCD$

(ⅱ) △AHG의 넓이

$\overline{GH}=\overline{OH}+\overline{OG}$

$\overline{OH}=\overline{OB}-\overline{BH}$

$=\frac{1}{2}a-\frac{1}{6}a=\frac{1}{3}a$ …… ㉠

$\overline{AN}=b$라 하면

$\overline{AI}=\frac{2}{3}b,\ \overline{OF}=\frac{1}{2}b$

$\overline{OF}:\overline{AI}=\frac{1}{2}b:\frac{2}{3}b=3:4$

$\overline{OG}:\overline{GI}=\overline{OF}:\overline{AI}=3:4$

$\overline{OG}=\frac{3}{7}\overline{OI},\ \overline{OI}=\frac{1}{3}\overline{OD}=\frac{1}{6}a$

$\overline{OG}=\frac{1}{14}a$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의해

$\overline{GH}=\frac{1}{3}a+\frac{1}{14}a=\frac{17}{42}a$

$\triangle AHG=\frac{17}{42}\triangle ABD=\frac{17}{84}\square ABCD$

$\square AEHG=\left(\frac{1}{16}+\frac{17}{84}\right)\square ABCD$

$=\frac{89}{336}\square ABCD$

$=\frac{89}{336}\times 672=178(\text{cm}^2)$

$\therefore\ x=178$

22. (정사각형인 그림자의 넓이)

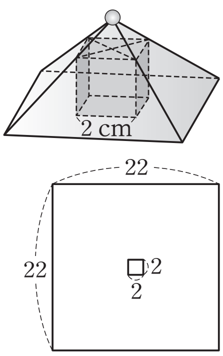
$=480+$(정사각형인 한 밑면의 넓이)

$=480+4=484(\text{cm}^2)$

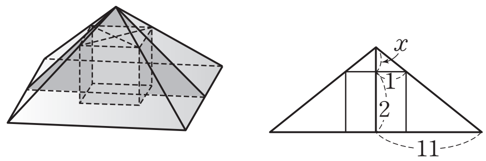
이때 $484=22\times 22$이므로

그림자의 한 변의 길이는

22 cm이다.



광원을 지나고 밑면에 수직이며 정육면체의 한 옆면과 평행한 단면을 생각하면



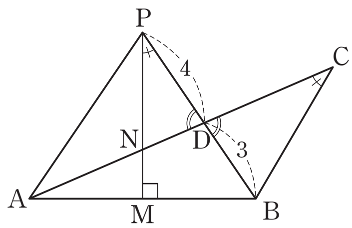
$x:1=(x+2):11,\ 11x=x+2$

$10x=2,\ x=\frac{1}{5}$

따라서 $p=5,\ q=1$이므로

$2p+3q=2\times 5+3\times 1=13$

23. 점 P에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 M이라 하고, $\overline{PM}$과 $\overline{AC}$의 교점을 N이라 하자.



$\angle NPD=\angle BCD,\ \angle PDN=\angle CDB$이므로

$\triangle PND\backsim\triangle CBD$(AA 닮음)

$\overline{DN}:4=3:\overline{DC},\ \overline{DN}\times\overline{DC}=12$

$\overline{PA}:\overline{PD}=\overline{AN}:\overline{DN}=7:4,\ \overline{AN}=\frac{7}{4}\overline{DN}$

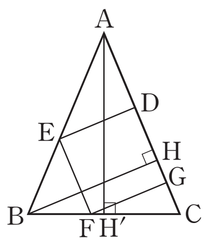
$\overline{DA}\times\overline{DC}=(\overline{DN}+\overline{AN})\times\overline{DC}$

$=\left(\frac{11}{4}\overline{DN}\right)\times\overline{DC}$

$=\frac{11}{4}\times\overline{DN}\times\overline{DC}=\frac{11}{4}\times 12$

$=33$

24. 점 B에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 H, 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H′이라 하자.



△ABC가 이등변삼각형이므로 $\overline{AH'}$은 $\overline{BC}$의 수직이등분선이므로 $\overline{BH'}=5$, 피타고라스 정리에 의해 $\overline{AH'}=12$이다.

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times 10\times 12=60$

$\frac{1}{2}\times 13\times\overline{BH}=60$이므로

$\overline{BH}=\frac{120}{13}$

$\triangle BCH\backsim\triangle FCG$이므로

$\overline{BC}:\overline{FC}=\overline{BH}:\overline{FG}$

$\overline{FG}=x$라 하면

$10:\overline{FC}=\frac{120}{13}:x$, $\overline{FC}=\frac{13}{12}x$

$\triangle BAC \backsim \triangle BEF$이므로

$\overline{BC}:\overline{BF}=\overline{AC}:\overline{EF}$

$10:\left(10-\frac{13}{12}x\right)=13:x$

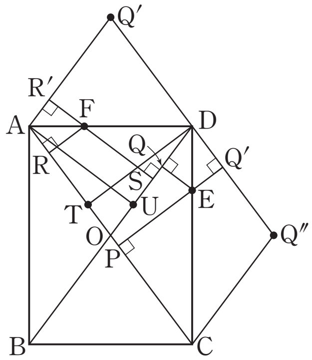
$130-\frac{169}{12}x=10x$, $\frac{289}{12}x=130$, $x=\frac{1560}{289}$

따라서 $p=289$, $q=1560$이므로

$\frac{p+q}{43}=\frac{1849}{43}=43$

($1560=2^3\times3\times5\times13$, $289=17^2$이므로 1560과 289는 서로소인 자연수)

25.



$\triangle AOD$와 $\overline{AD}$에 대하여 대칭인 $\triangle ADQ'$, $\triangle DOC$와 $\overline{DC}$에 대하여 대칭인 $\triangle DCQ''$을 그려 생각하면

$\overline{EP}+\overline{EQ}+\overline{FR}+\overline{FS}=\overline{AU}+\overline{DT}=2\overline{AU}$

$\square ABCD=108$

피타고라스 정리에 의해 $\overline{BD}=15$

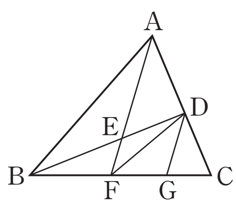
$2\times\frac{1}{2}\times15\times\overline{AU}=108$

$\overline{AU}=\frac{36}{5}$, $2\overline{AU}=\frac{72}{5}$

따라서 $p=5$, $q=72$이므로

$2p+q=2\times5+72=82$

26. $\overline{AF}$와 평행한 선분 $\overline{DG}$를 그으면



$\overline{AD}:\overline{DC}=\overline{FG}:\overline{GC}$

$=5:4$

$=10:8$

$\overline{BE}:\overline{ED}=\overline{BF}:\overline{FG}=3:2=15:10$이므로

$\overline{BF}:\overline{FG}:\overline{GC}=15:10:8$

$\overline{BF}:\overline{FC}=15:18=5:6$

$\overline{BE}:\overline{ED}=3:2$이므로

$\triangle DBF:\triangle DFC=\overline{BF}:\overline{FC}=5:6$

$\triangle EBF:\square EFCD=3:8$

$\triangle DBC$의 넓이를 $11a$라 하면

$\triangle ABD:\triangle DBC=5:4$이므로

$\triangle ABD=\frac{55}{4}a$

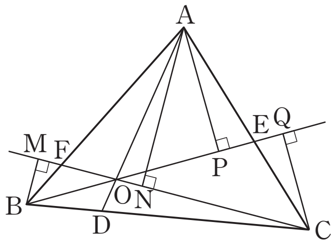
$\triangle ABE=\frac{3}{5}\triangle ABD=\frac{33}{4}a$

$\frac{32}{33}\times\frac{33}{4}a=8a$이므로

$\square EFCD=\frac{32}{33}\triangle ABE$이다.

따라서 $k=\frac{32}{33}$이므로 $99k=96$

27.



두 점 A, B에서 직선 FC에 내린 수선의 발을 각각 N, M이라 하면

$\triangle AOC=\frac{1}{2}\times\overline{AN}\times\overline{OC}$

$\triangle BOC=\frac{1}{2}\times\overline{BM}\times\overline{OC}$

이때 $\triangle AFN \backsim \triangle BFM$이므로

$\frac{\triangle AOC}{\triangle BOC}=\frac{\overline{AN}}{\overline{BM}}=\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}}=\frac{7}{2}$

두 점 A, C에서 직선 BE에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하면

$\triangle AOB=\frac{1}{2}\times\overline{BO}\times\overline{AP}$

$\triangle BOC=\frac{1}{2}\times\overline{BO}\times\overline{CQ}$

이때 $\triangle AEP \backsim \triangle CER$이므로

$\frac{\triangle AOB}{\triangle BOC}=\frac{\overline{AP}}{\overline{CQ}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}=\frac{m}{n}$

$$\frac{\triangle AOB}{\triangle BOD}=\frac{\overline{AO}}{\overline{DO}}=\frac{\triangle AOC}{\triangle COD}$$

$$=\frac{\triangle AOB+\triangle AOC}{\triangle BOD+\triangle COD}$$

$$=\frac{\triangle AOB+\triangle AOC}{\triangle BOC}$$

$$=\frac{\triangle AOB}{\triangle BOC}+\frac{\triangle AOC}{\triangle BOC}$$

$$=\frac{7}{2}+\frac{m}{n}=\frac{7n+2m}{2n}$$

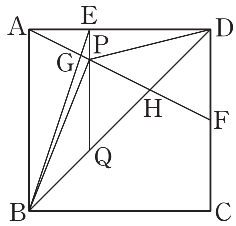
$=\dfrac{19}{4}$

$28n+8m=38n$, $4m=5n$, $\dfrac{m}{n}=\dfrac{5}{4}$

따라서 $m=5$, $n=4$이므로

$3m+5n=15+20=35$

28. $\overline{AB}$와 평행한 선분 EQ를 긋고, $\overline{EQ}$와 $\overline{AF}$의 교점을 P라 하자.



$\overline{EP}:\overline{DF}=1:3$,

$\overline{DF}:\overline{AB}=1:2$이므로

$\overline{EP}:\overline{AB}=1:6$

$\triangle ABG \backsim \triangle PEG$, $\overline{AG}:\overline{GP}=6:1$

$\triangle AGE$의 넓이를 6이라 하면

$\triangle EGP=1$, $\triangle EPD=14$, $\triangle APD=21$

$\overline{AP}:\overline{PH}=1:1$이므로

$\triangle PHD=\triangle APD=21$

$\overline{PH}:\overline{HF}=1:1$이므로 $\triangle DHF=21$

$\triangle PQH=\triangle FDH=21$

$\overline{AP}:\overline{PH}=1:1$이고 $\overline{PQ}/\!/\overline{AB}$이므로

$\overline{BQ}:\overline{QH}=1:1$

$\triangle PBQ=\triangle PQH=21$

$\triangle ABP=\triangle PBH=42$

$\square EGHD=\triangle EGP+\triangle EPD+\triangle PHD$

$=1+14+21=36$

$\triangle ABD=\triangle ABP+\triangle PBH+\triangle AGE$

$+\triangle EGP+\triangle EPD+\triangle DPH$

$=42+42+6+1+14+21$

$=126$

$(\square HBCF$의 넓이$)=\triangle ABD-\triangle DHF$

$=126-21=105$

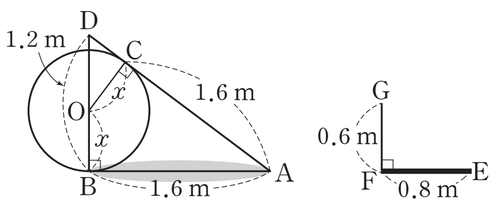
이때 $\square HBCF$의 넓이는 $\square EGHD$의 넓이의

$\dfrac{105}{36}$배, 즉 $\dfrac{35}{12}$배이다.

따라서 $p=12$, $q=35$이므로

$p+q=12+35=47$

29.



$\triangle ABD \backsim \triangle EFG$에서

$\overline{AB}:\overline{BD}=\overline{EF}:\overline{FG}$, $1.6:\overline{BD}=0.8:0.6$

$\therefore \overline{BD}=1.2(\mathrm{m})$

$\triangle ABD$에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AD}=2(\mathrm{m})$

또, $\triangle ABO \equiv \triangle ACO$(RHS 합동)

이므로 $\overline{AC}=\overline{AB}=1.6(\mathrm{m})$

$\overline{CD}=\overline{AD}-\overline{AC}=2-1.6=0.4(\mathrm{m})$

$\triangle EFG \backsim \triangle OCD$에서

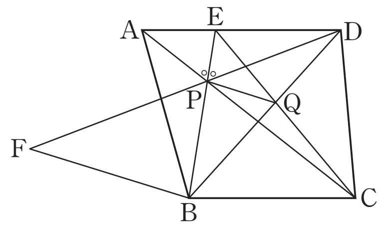
$\overline{CD}:\overline{CO}=\overline{GF}:\overline{FE}$이므로

$0.4:x=3:4$, $x=\dfrac{1.6}{3}=\dfrac{8}{15}(\mathrm{m})$

따라서 $p=15$, $q=8$이므로

$p+q=15+8=23$

30.



위의 그림에서 $\angle APE=\angle EPD$이므로

$\overline{PA}:\overline{PD}=\overline{AE}:\overline{DE}=\overline{AE}:3$

$3\overline{PA}=\overline{PD}\times\overline{AE}$이므로 $\overline{AE}=\dfrac{3\overline{PA}}{\overline{PD}}$ …… ㉠

$\triangle APE$와 $\triangle CPB$에서

$\angle APE=\angle CPB$(맞꼭지각),

$\angle AEP=\angle CBP$(엇각)이므로

$\triangle APE \backsim \triangle CPB$(AA 닮음)

즉, $\overline{AP}:\overline{PC}=\overline{AE}:\overline{CB}=\overline{AE}:4$이므로

$4\overline{PA}=\overline{PC}\times\overline{AE}$, $\overline{AE}=\dfrac{4\overline{PA}}{\overline{PC}}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\dfrac{3\overline{PA}}{\overline{PD}}=\dfrac{4\overline{PA}}{\overline{PC}}$이므로

$4\overline{PD}=3\overline{PC}$, $\overline{PD}:\overline{PC}=3:4$ …… ㉢

$\overline{DP}$의 연장선 위에 $\overline{PC}=\overline{PF}$인 점 F를 잡으면

$\triangle PFB \equiv \triangle PCB$ (SAS 합동)

$\overline{BF}=\overline{BC}=4$

또 $\overline{PF}=\overline{PC}$이므로 ㉢에서

$\overline{PD}:\overline{PF}=\overline{PD}:\overline{PC}=3:4$ …… ㉣

$\triangle EDQ \backsim \triangle CBQ$ (AA 닮음)이므로

$\overline{DQ}:\overline{BQ}=\overline{ED}:\overline{CB}=3:4$

또한 $\overline{DP}:\overline{PF}=\overline{DQ}:\overline{QB}=3:4$이므로

$\overline{PQ}/\!/\overline{FB}$

$\overline{PQ}:\overline{FB}=\overline{DP}:\overline{DF}=3:(3+4)=3:7$

이므로

$\overline{\mathrm{PQ}} : 4 = 3 : 7$, $\overline{\mathrm{PQ}} = \frac{12}{7}$

따라서 $p = 7$, $q = 12$이므로

$4p + 3q = 4 \times 7 + 3 \times 12 = 64$